අනුකලනය

[ප්‍රතිව්‍යුත්පන්නය]

මූලික දැනුම

$$\frac{d\,[f(x)]}{dx} = g(x) \text{ නම්;}$$

$$\int g(x)\,dx = f(x)$$

අනුකලනය

① අනිශ්චිත අනුකලනය

1. පොදු සිද්ධාන්ත
2. ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල අනුකලනය
3. ඝාතීය ශ්‍රිතවල අනුකලනය
4. a^x ආකාරයේ ශ්‍රිතවල අනුකලනය
5. ලඝුගණක / පරිමේය ශ්‍රිතවල අනුකලනය
6. ආදේශය මගින් අනුකලනය
7. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය

නිශ්චිත අනුකලනය

- සාමාන්‍ය අනුකලනය
- ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල සාමාන්‍ය අනුකලනය
- විශේෂ ප්‍රමේය

③ අනුකලනයේ යෙදීම

වර්ගඵලය

පරිමාව.

① අනිශ්චිත අනුකලනය

නිශ්චිත අනුකලනය හා වෙනත් අනුකලනයේ පිළිතුරේ නියතය අන්තර්ගත නොවේ

* සෑම අනිශ්චිත අනුකලනයකම. පිළිතුරේ අවසානයේ C යොදා, (C අභිමත නියතයකි) සැලකිලිමත්.

② පොදු සිද්ධාන්ත :

[3] $$\int x^n\,dx = \frac{(x)^{n+1}}{n+1}$$

(n, පූර්ණ සංඛ්‍යා/භාග නම් , $n \neq -1$) $(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -4, 0)$

[4] $$\int 1\,dx = x$$

[5] x වල රේඛීය ශ්‍රිතයක බලයක් ඇත්නම්.
මෙහිදී රේඛීය ශ්‍රිතය X ලෙස ගෙන [3] ලෙස ලියා x වල සංගුණකයෙන් බෙදිය.

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{X^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{a} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{a} + C$$

(C අභිමත නියතයකි)

[6] $$\int \frac{\text{හරයේ අවකලනය}}{\text{හරය}}\,dx = \ln|\text{හරය}|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$$

[7] $$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

අනුකලනයේ මූලික නීති

[1] $$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

k නියතයකි

[2] $$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Note:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

② ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල - අනුකලනය

[8]

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$
$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$
$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x$$
$$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$$
$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$$
$$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x$$

[9]

$$\boxed{\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c}$$

$$\boxed{\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c}$$

[10]

$$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x|}$$

$$\boxed{\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x|}$$

[11] $\sin x$, $\cos x$ වල වර්ගවල අනුකලනය

$\cos^2 x =$	$\dfrac{1+\cos 2x}{2}$
$\sin^2 x =$	$\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

උදා : $\cos^2 x \to \cos 2x$

$\sin^2 x \to \sin x$

$\cos^4 x \to \cos^2 x \to \cos 2x$

$\sin^4 x \to \sin^2 x \to \sin 2x$

[12] $\sin x$, $\cos x$ වල ගුණිත අනුකලනය

$2\sin A\cos B =$	$\sin(A+B) + \sin(A-B)$
$2\cos A\sin B =$	$\sin(A+B) - \sin(A-B)$
$2\cos A\cos B =$	$\cos(A+B) + \cos(A-B)$
$2\sin A\sin B =$	$\cos(A-B) - \cos(A+B)$

සූත්‍ර C+D, C−D සූත්‍රවල

සමහර සූත්‍රවල භාවිතය

ගුණිතය → එකතුවක්/ අන්තරයක් කිරීම

Note

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල කෝණය අනුකලනය වෙනුවට

උදා : x වෙනුවට $2x$ $3x$ $4x$ $\frac{1}{2}x$

$\frac{3}{4}x$ ආදිය.

මෙම ශ්‍රිත වල X ලෙස සලකා

අනුකලනය කළ යුතුය.

x හි සංගුණකයෙන් බෙදිය යුතුය

උදා: ① $\int \cos 5x\, dx$

$\dfrac{\sin X}{5} + c$

$\dfrac{\sin 5x}{5} + c$

② $\int \sin 2x\, dx$

$-\dfrac{\cos X}{2} + c$

$-\dfrac{\cos 2x}{2} + c$

[13] $\sin x$, $\cos x$ වල ඝනවල අනුකලනය.

$\cos^3 x =$	$\dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$
$\sin^3 x =$	$\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

උදා : 3A සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$(\ )^3 \to x,\ 3x$ වලට පරිවර්තනය.

[14] $\sin x$, $\cos x$ වල 6 බලවල අනුකලනය

උදා : (11), (13) සූත්‍ර

ඝනයේ ලෙස වර්ගයක් ලෙස

වර්ගයේ ඝනයක් ලෙස හෝ

ලෙස සලකා අනුකලනය

1. උදා: $\int \cos^6 x\, dx$

$\int (\cos^3 x)^2\, dx \qquad \int (\cos^2 x)^3\, dx$

වර්ග ත්‍රිකෝණමිතික

15 ශ්‍රිතවල වර්ගවල අනුකලනය

(1) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2}\,dx$

(2) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx$

(3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

(4) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$

*(5) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \int \sec^2 x - \int 1.\,dx$

$= \tan x - x$

*(6) $\int \cot^2 x\,dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx$

$= -\cot x - x$

(3) ඝාතීය ශ්‍රිතවල අනුකලනය

16 $\boxed{\int e^x.\,dx = e^x}$

උ.දා: $\int e^{3x+5}\,dx$

$\frac{e^{3x+5}}{3} + c$

(4) $\int a^x$ ආකාරයේ ශ්‍රිතවල අනුකලනය.

මෙහිදී a^x ශ්‍රිතය ඝාතීය ශ්‍රිතයට හරවමු

$a^x = e^t$ ලෙස ගෙන දෙපසටම ln ගනිමු

$\ln a^x = \ln e^t$

$x \ln a = t \underbrace{\ln e}_{=1}$

$t = x\ln a$

$\therefore a^x = e^{x\ln a}$

a^x ආකාරයට ඇති ශ්‍රිත ඝාතීය ශ්‍රිතයට හරවා (16) සූත්‍රය භාවිතා කරමු.

උ.දා: $\int 4^{3x}\,dx$

$4^{3x} = e^t$

$3x\ln 4 = t\ln e$

$t = 3x\ln 4$

$\int e^{3x\ln 4}\,dx$

$\frac{e^{3x\ln 4}}{3\ln 4} + C$

(5) ලඝුගණක / පරස්පර ශ්‍රිතවල අනුකලනය

17 n හි පරස්පර නොවන විට $n \neq (-1)$ විට;

$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$

18 හරයේ අවකලය ලවයට x හි සමාන වන විට $\ln|\text{හරය}|$ ලෙස ලැබේ

උ.දා: $\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+2| + c$

උ.දා: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

$\boxed{\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \ln|ax+b| + C}$

හරයේ x හි සංගුණකය ලවයේ නොමැති නම්, එය සකසා ගැනීමට

උ.දා: $\int \frac{1}{3-5x}\,dx$

$= \frac{1}{-5}\int \frac{-5}{3-5x}\,dx$

$= \left(\frac{1}{-5}\ln|3-5x|\right) + c$

උ.දා: $\int \frac{p}{ax+b}\,dx$

$= \frac{p}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx$

$= \frac{p}{a}\ln|ax+b| + C$

19 $\int \frac{1}{x^2+a^2}$ ආකාරයේ

$\tan^{-1}$ සූත්‍රයෙන් ලැබේ

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

උදා:- $\int \frac{1}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

උදා:- $\int \frac{5}{x^2+49}dx = 5\int \frac{1}{x^2+7^2}dx$

$= 5\left(\frac{1}{7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{7}\right)+c\right)$

$= \frac{5}{7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{7}\right)+c$

x වල [illegible] X ලෙස [illegible] නව [illegible]

උදා:- $\int \frac{1}{2x^2+1}dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1^2}dx$

$= \left[\frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x)+c$

20 $\int \frac{1}{x^2-a^2}$ ආකාරයේ

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$$

උදා:- $\int \frac{5}{x^2-2}dx = 5\int \frac{1}{x^2-(\sqrt{2})^2}dx$

$= 5\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+c$

x වල [illegible] X ලෙස [illegible] නව [illegible]

උදා:- $\int \frac{1}{25x^2-9}dx = \int \frac{1}{(5x)^2-3^2}$

$= \left[\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{5x-3}{5x+3}\right|\right]\frac{1}{5}$

$= \left(\frac{1}{30}\ln\left|\frac{5x-3}{5x+3}\right|+c\right)$

Notes [illegible]

$\Delta>0$; [illegible]

$\Delta=0$; [illegible]

$\Delta<0$; [illegible]

[illegible]

[illegible] (1) [illegible]

(2) [illegible]

(3) [illegible]

[illegible]

[illegible]

උදා:- $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1/2}{(x-1)} + \frac{-2}{(x-2)} + \frac{3/2}{(x-3)}$

$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\frac{1}{(1-2)(1-3)}$	$\frac{2}{(2-1)(2-3)}$	$\frac{3}{(3-1)(3-2)}$
$\frac{1}{-1.-2}$	$\frac{2}{1.-1}$	$\frac{3}{2.1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$

[illegible]

$$\left[\int \frac{p}{ax^2+bx+c}\text{ ආකාරයේ}\right]$$

(1) [illegible] $(\Delta>0)$ - [illegible]

(2) [illegible] $(\Delta=0)$ - x^n ආකාරයේ

(3) [illegible] $(\Delta<0)$ - $\tan^{-1}$ [illegible]

① හරයේ සාධකයන්ට කළ හැකි අවස්ථාව ($\Delta > 0$)

[21] $\Delta > 0$ නම්, හරයේ සාධක ...   උපදෙස්: පළමුව හරය සාධක වෙන් කර (භින්න භාගවලට වෙන් කර) පසුව සාමාන්‍ය ලෙස අනුකලනය කරන්න.

උ.දා: $\int \frac{1}{x^2-10x+9} dx$

$x^2-10x+9$
$\Delta = b^2-4ac$
$= 100-4.1.9$
$\Delta > 0$

$= \int \frac{1}{(x-1)(x-9)} dx$

$= \int \frac{-1/8}{(x-1)} + \int \frac{1/8}{(x-9)}$

$x=1$: $\frac{1}{-8}$; $x=9$: $\frac{1}{8}$

$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-9)}$

$= -\frac{1}{8} \cdot \ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x-9|$

$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-9}{x-1}\right| + c$ //

උ.දා: $\int \frac{5}{x^2-2x} dx$

$\Delta = 4-0$
$\Delta > 0$

$= \int \frac{5}{x(x-2)}$

$= \int \frac{5/-2}{x} + \int \frac{5/2}{(x-2)}$

$x=0$: $\frac{5}{-2}$; $x=2$: $\frac{5}{2}$

$= \frac{5}{2}\left[\ln|x-2| - \ln|x|\right]$

$= \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + c$ //

② හරයේ පූර්ණ වර්ගයක් ඇති අවස්ථාව ($\Delta = 0$)

[22] $\Delta = 0$ නම්, හරයේ පූර්ණ වර්ගයක් ...   උපදෙස්: $\frac{x^n}{1}$ ආකාරයට හරවන්න
$\int x^n \, dx = \frac{(x)^{n+1}}{n+1}$ යොදන්න.
x වල ශ්‍රිතය X ලෙස ගෙන යොදා. x වල සංගුණකයෙන් ... ලැබෙන පිළිතුර ...

උ.දා: $\int \frac{4}{x^2+10x+25} dx$

$\Delta = 100-4.25$
$\Delta = 0$

$= \int \frac{4}{(x+5)^2} dx$

$= 4\int (x+5)^{-2} dx$

$= 4\left(\frac{(x+5)^{-1}}{-1}\right)\frac{1}{1}$

$= \frac{-4}{(x+5)} + c$ //

උ.දා: $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$

$\Delta = 16-4.4$
$\Delta = 0$

$= \int \frac{1}{(2x+1)^2} dx$

$= \int (2x+1)^{-2} dx$

$= \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{-1}{2(2x+1)} + c$ //

③ හරයේ සාධක වෙන් කළ නොහැකි අවස්ථාව ($\Delta < 0$)

[23] $\Delta < 0$ නම්, හරයේ පූර්ණ වර්ගය ...   උපදෙස්: $\frac{1}{x^2+a^2}$ ආකාරයට හරවන්න. ...
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ යොදන්න.
x වල ශ්‍රිතය X ලෙස ගෙන යොදා. x වල සංගුණකයෙන් ... යොදන්න.

උ.දා: $\int \frac{1}{x^2+2x+26} dx$

$\Delta = 4-4.26$
$\Delta < 0$

$\int \frac{1}{(x+1)^2+25}$

$\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{25})^2}$

$\frac{1}{\sqrt{25}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{25}}\right)\frac{1}{1} + c$

$\frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{5}\right) + c$ //

උ.දා: $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

$\int \frac{1}{x^2+3^2} dx$

$\int \frac{1}{x^2+3^2} dx$

$\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$ //

[illegible]

$$\left[\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \text{ [illegible]} \right]$$

① [illegible] $(\Delta > 0)$ – [illegible]

② [illegible] $(\Delta = 0)$ – ln | [illegible] | [illegible]

③ [illegible] $(\Delta < 0)$ – ln | [illegible] | [illegible]

① [illegible] $(\Delta > 0)$

24 $\Delta > 0$ [illegible]

e.g. $$\int \frac{1-2x}{x^2-x-2}\,dx$$

$\Delta = 1-(4)(-2)$
$\Delta = 1+8$
$\Delta > 0$

$$= \int \frac{1-2x}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{-13/3}{(x-2)}\,dx + \int \frac{-8/3}{(x+1)}\,dx$$

$x=2$: $\frac{1-14}{3} = -\frac{13}{3}$

$x=-1$: $\frac{1+7}{-3} = -\frac{8}{3}$

$$= \frac{-13}{3}\int \frac{1}{(x-2)}\,dx - \frac{8}{3}\int \frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{-13}{3}\ln|x-2| - \frac{8}{3}\ln|x+1| + c$$

② [illegible] $(\Delta = 0)$

25 $\Delta = 0$ [illegible] ln | [illegible] | [illegible]

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

[illegible]
(25) [illegible] (22) [illegible]

e.g. $$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}\,dx$$

$$= \ln|x^2-6x+9|$$

$$= 2\ln|x-3| + c$$

e.g. $$\int \frac{4x}{x^2+2x+1}\,dx$$

$4x$ ↓ $2x+2$

$$= \int \frac{2(2x+2)-4}{(x^2+2x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{2(2x+2)}{(x^2+2x+1)}\,dx - \int \frac{4}{(x^2+2x+1)}\,dx$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)}\,dx - 4\int \frac{1}{(x^2+2x+1)}\,dx$$

$$= 2\ln|(x+1)^2| - 4\int (x+1)^{-2}\,dx$$

$$= 4\ln|x+1| - 4\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\cdot\frac{1}{1}$$

$$= 4\ln|x+1| + \frac{4}{(x+1)} + c$$

e.g. $$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+1}\,dx$$

$2x-2$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{(x-1)^2} + 4\int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|(x-1)^2| + 4\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\cdot\frac{1}{1}$$

$$= 3\ln|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + c$$

$$= 3\ln|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + c$$

[illegible] ⇒ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$

[illegible] ⇒ $$\int x^n\,dx = \frac{(x)^{n+1}}{n+1}$$

[illegible]

③ හරයේ සාධක වෙන් කළ නොහැකි අවස්ථා ($\Delta < 0$)

හරය සාධක වෙන් කළ හැකි අවස්ථා

$$\left[\frac{p}{ax^2+bx+c} \;\middle|\; \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \;\middle|\; \frac{px}{ax^3+cx} \right] \text{ - etc.}$$

① හ.මා > ල.මා
- භින්නාංශ වෙන්කිරීම [ගුණිතවලට හෝ දිගු බෙදීම]

② හ.මා ≤ ල.මා
- දිගු බෙදීමෙන් බෙදා හරින්න

③ හ.මා ල.මා

26

$\Delta < 0$ වන් හරය, හා ලවය වෙන්ව යුගලයක්

මුලින්ම $\ln|$හරය$|$ ආකාරයට හැරවිය යුතුය

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

එසේ නොවේනම්, ලවය හරයේ අවකලයක ලෙස සකසන්න. ඉතිරිවූ පදයක් ඇතිවිය. කාණ්ඩගතකර පද දෙක. පසුව පද වෙන්කරන්න.

සාමාන්‍ය ලෙස අනුකලනය කරන්න.

(26) හා (23)

කොටස් 2ට ; එකක් නම්
$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

අනෙක් පදය $\Rightarrow$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

2 i) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+11}\,dx$

$= \ln|x^2-2x+11| + c$

2. ii) $\int \frac{1-3x}{x^2+4}\,dx$

$$\int \frac{-\frac{3}{2}(2x)+1}{x^2+4}\,dx$$

$= -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx$

$= -\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$= -\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

① හ.මා > ල.මා. [සාමාන්‍ය භාග]

27

හරයේ සාධක වෙන් කළ හැකිනම්, හරයේ හැකිතරම් සාධක කරන්න.

භින්න භාග වෙන්කරන්න.
- ගුණිතවලට
- දිගු බෙදීම

① හ.මා > ල.මා — හරයේ ( )ⁿ නැති — A, B, C ලෙස දී උපක්‍රම යොදාගනිමින් සමාන කර

② හ.මා > ල.මා — හරයේ ( )ⁿ ඇති (පුනරාවර්තන සාධක) — භින්න භාග A, B, C අගය සොයා අනුකලනය කරන්න

③ හ.මා ≤ ල.මා

2. iii) $\int \frac{1}{x^3-4x}\,dx$

$= \int \frac{1}{x(x^2-4)}\,dx$

$= \int \frac{1}{x(x-2)(x+2)}\,dx$

$= \int \frac{-1/4}{x} + \int \frac{1/8}{(x-2)} + \int \frac{1/8}{(x+2)}$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+2)}$

$= -\frac{1}{4}\int x^{-1} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+2)}$

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + c$

$x = 0$: $\frac{1}{-4}$

$x = 2$: $\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

$x = -2$: $\frac{1}{-2 \cdot -4} = \frac{1}{8}$

උදා: $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$

භින්නභාග   වර්ගජ සාධකවලින් යුක්තව

$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^1} + \frac{C}{(x+1)}$

$\times (x-1)^2(x+1),$

$1 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$

$x^2 \to 0 = B + C$ $\qquad A = 1/2$

$x \to 0 = A - 2C$ $\qquad B = -1/4$

නි.ප $\to 1 = A - B + C$ $\qquad C = \frac{1}{4}$

$= \int \frac{1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)}$

$= \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2} - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1|$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

$= \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

උදා: $\int \frac{2x^3+1}{x^2-1}\,dx$

$= \int \frac{2x^3+1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

භින්නභාග

~~$\frac{2x^3+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$~~

~~$\times (x-1)(x+1)$~~

~~$2x^3+1 = A(x+1) + B(x-1)$~~

~~$x \to 0 = A + B - C$~~ $\qquad$ ~~$A = 1/2$~~

~~නි.ප $\to 1 = A + B - C$~~ $\qquad$ ~~$B = -\frac{1}{2}$~~

හ.බ < ල.බ

$\frac{2x^3+1}{(x-1)(x+1)} = (Ax+B) + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x+1)}$

$2x^3+1 = (Ax+B)(x^2-1) + C(x+1) + D(x-1)$

$x^3 \to 2 = A$

$x^2 \to 0 = B$

$x \to 0 = -A + C + D$

$2 = C + D$

නි.ප $\to 1 = -B + C - D$

$1 = C - D$

$C = 3/2$

$D = \frac{1}{2}$

$= \int 2x + \int \frac{3/2}{(x-1)} + \int \frac{1/2}{(x+1)}$

$= 2\int x^1\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}\,dx.$

$= 2\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

උදා: $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx$

භින්නභාග

$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}$

$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$

$x^2 \to 0 = A + B$

$x \to 0 = -A + B + C$

$0 = 2B + C$

නි.ප $\to 1 = A + C$

$-1 = B - C$

$-1 = 3B$

$B = -1/3$

$C = \frac{2}{3}$

$A = \frac{1}{3}$

$= \int \frac{1/3}{(x+1)} + \int \frac{-1/3(x) + 2/3}{(x^2-x+1)}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{(x^2-x+1)}$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - 3/2}{x^2-x+1}$ $\quad 2x-1$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$

$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$

$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$

$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C$

$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|$

$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{5}/2}\right) + C$

② හ.මා < ල.මා

* මෙහි කාරක (27) ලෙසද සැලකිය හැක

28

හරයේ සාධක බෙදිය නොහැකි,
හරයේ මා ≤ ල.මා නම්,

දිර්ඝ බෙදීමෙන් බෙදන්න.
එය මේ ආකාරයට ලියන්න.

$$\int \text{ලබ්ධිය} + \frac{\text{ශේෂය}}{\text{භාජකය}}$$

සාමාන්‍ය ලෙස මෙය
අනුකලනය කරන්න

භාජකය $\overline{)\text{භාජ්‍යය}}$ ලබ්ධිය
=
ශේෂය

උදා: $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+5x+10}{x^2+1}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ x^2+1 & x^3+2x^2+5x+10 \\ & x^3+x \\ \hline & 2x^2+4x+10 \\ & 2x^2+2 \\ \hline & 4x+8 \end{array}$$

$$= \int (x+2) + \frac{4x+8}{x^2+1}$$

$$= \int (x+2)^1 + \int \frac{4x+8}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2}\cdot\frac{1}{1} + \int \frac{2(2x)+8}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + 2\ln|x^2+1| + 8\int \frac{1}{x^2+(1)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + 2\ln|x^2+1| + 8\,\frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)$$

2 ක්‍රමය

$$= \int x+2 + \frac{4x+8}{x^2+1}$$

$$= \int x + \int 2 + \int \frac{4x+8}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\int 1.\,dx + \int \frac{4x+8}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x^2+1| + 8\tan^{-1}\left(\frac{x}{1}\right) + c$$

උදා: $\displaystyle\int \frac{5x^2+7}{x^2+4}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ x^2+4 & 5x^2+7 \\ & 5x^2+20 \\ \hline & -13 \end{array}$$

$$= \int 5 + \frac{-13}{x^2+4}$$

$$= \int 5 - \int \frac{13}{x^2+4}$$

$$= 5x - 13\int \frac{1}{x^2+2^2}$$

$$= 5x - 13\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

වර්ග මූල ඇතුලත සූත්‍ර

29 $$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

උදා: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$

x වල වර්ගය සංගුණකයක් ඇත්නම්
x ලෙස ගෙන පෙරළිදි ව්‍යුත්පන්නයෙන් බෙදිය
යුතුය. (ව්‍යුත්පන්නයෙන් බෙදන්න)

උදා: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(3x)^2}}\,dx$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + c$$

30 $$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm A}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm A}\right|}$$

උදා: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + c$

උදා: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-10}\right| + c$

x වල වර්ගය සංගුණකයක් ඇත්නම් x ලෙස
ගෙන පෙරළිදි ව්‍යුත්පන්නයෙන්
x වල ව්‍යුත්පන්නයෙන් බෙදිය යුතුය.

උදා: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-1}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(5x)^2-1}}\,dx$$

$$= \ln\left|5x+\sqrt{25x^2-1}\right| \times \frac{1}{5} + c$$

31 $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}}$$

උදා: $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+5}}\,dx = 2\sqrt{e^x+5} + c$

උදා: $\int \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx = 2\sqrt{x^3-x} + c$

<u>හරයේ වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් සාධකවලට</u>
<u>කළ නොහැකි ලවයේ නියතයක් අඩංගු වූ විට</u>

$$\left[\frac{p}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]$$

① x^2 සංගුණකය ⊖ වනවිට
- $\sin^{-1}$ සූත්‍රය

② x^2 සංගුණකය ⊕ වනවිට
- ln සූත්‍රය

① x^2 සංගුණකය ⊖ වනවිට

32 $\int \frac{p}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$ ආකාරයේ නම්,

වර්ගජ ප්‍රකාශනය $a^2 - x^2$ ලෙස සකස් කර

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

යොදන්න

උදා: $\int \frac{1}{\sqrt{8x-x^2}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{-(x-4)^2+16}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-4)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right)\frac{1}{1} = \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + c$$

උදා: $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{-(x+2)^2+4+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

33 $\int \frac{p}{\sqrt{+ax^2+bx+c}}$ ආකාරයේ නම්,

වර්ගජ ප්‍රකාශනය $x^2 \pm A$ ආකාරයට සකස් කර

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm A}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm A}\right|$$

යොදන්න

උදා:- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+17}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 \cancel{-4} + 17}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 13}}\,dx$$

$$= \ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+13}\right| + c$$

<u>හරයේ වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් සාධකවලට කළ</u>
<u>නොහැකි ලවයේ රේඛීය ප්‍රකාශනයක් අඩංගු වූ විට</u>

$$\left[\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right] \rightarrow \sqrt{f(x)} \text{ සූත්‍රය}$$

34 $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ආකාරයේ නම්,

ලවය $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ ආකාරයට සකස් කර

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}$$

යොදන්න

උදා: $\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = 2\sqrt{3x-x^2} + c$

උදා: $\int \frac{9x-2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{9}{2}(2x)-2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \frac{9}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \frac{9}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$= 9\sqrt{x^2+1} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + c$$

(VI) ආදේශය මගින් අනුකලනය

දී ඇති අනුකලනය කෙලින්ම අනුකලනය කළ නොහැකි විට සුදුසු ආදේශයක් කිරීම මගින් දී ඇති අනුකලනය සම්මත අනුකලයකට පත් කර ගැනීම.

ආදේශය වර්ග
- ① ප්‍රමිත ආදේශය
- ② විශේෂ ආදේශය.

1 ප්‍රමිත ආදේශ

	ශ්‍රිත ස්වරූපය	ආදේශය
35	$\sqrt{ax+b}$	$= t$
36	$(ax+b)^{\frac{1}{n}}$	$= t$
37	$(ax+b)^{\frac{m}{n}}$ ස්වරූප,	$(ax+b)^{1/n} = t$
38	$\sqrt{a^2-x^2}$ ස්වරූප, හෝ $(a^2-x^2)^{\frac{m}{2}}$	$x = a\sin\theta$ හෝ $x = a\cos\theta$
39	$\sqrt{x^2+a^2}$ ස්වරූප, හෝ $(x^2+a^2)^{m/2}$	$x = a\tan\theta$ හෝ $x = a\cot\theta$
40	$\sqrt{x^2-a^2}$ ස්වරූප,	$x = a\sec\theta$ හෝ $x = a\operatorname{cosec}\theta$

පියවර ① දී ඇති ආදේශය ලෙස t ලියා ගන්න.

② එමගින් x සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

③ ② දී ලැබෙන අවකලනයෙන් dx සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

④ ①, ②, ③ ප්‍රකාශ ප්‍රශ්නයේ ආදේශ කරන්න.

⑤ සාමාන්‍ය පරිදි අනුකලනය කරන්න.

⑥ අනුකලනයේ අවසාන පිළිතුර ප්‍රකාශනය ආදේශයක් ලෙස ඉවත් කරන්න.

උදා: $\int \frac{1}{(x+5)\sqrt{x+1}}\,dx$

$\sqrt{x+1} = t$ — ①

$x+1 = t^2$

$x = t^2-1$ — ②

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$dx = 2t\,dt$ — ③

①, ②, ③ ආදේශයෙන්

$= \int \frac{1}{(t^2+4)\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt$

$= \int \frac{1}{(t^2+4)}\,2\,dt$

$= 2\int \frac{1}{(t^2+2^2)}\,dt$

$= 2\,\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right)+c$

උදා: $\int (x+4)(x-1)^{1/3}\,dx$

$(x-1)^{1/3} = t$

$x = t^3+1$

$\frac{dx}{dt} = 3t^2$

$dx = 3t^2\,dt$

$= \int (t^3+5)\,t\,.\,3t^2\,dt$

$= 3\int (t^3+5)\,t^3\,dt$

$= 3\int t^6 + 15t^3\,dt$

$= 3\int t^6\,dt + 15\int t^3\,dt$

$= 3\,\frac{t^7}{7} + 15\,\frac{t^4}{4}$

$= \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} + \frac{15}{4}(x-1)^{4/3}+c$

$= \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} + \frac{15}{4}(x-1)^{4/3}+c$

උදා: $\int \frac{1}{(x+2)^{2/3}+1}\,dx$

$(x+2)^{1/3} = t$

$x = t^3-2$

$dx = 3t^2\,dt$

$= \int \frac{1}{t^2+1}\,3t^2\,dt$

$= \int \frac{3t^2}{t^2+1}\,dt$

$t^2+1\,\overline{)\,3t^2}$; $3t^2+3$; -3 ; quotient 3

$= \int 3 - \frac{3}{(t^2+1)}\,dt$

$= 3t - 3\tan^{-1}(t)$

$= 3(x+2)^{1/3} - 3\tan^{-1}[(x+2)^{1/3}]+c$

2.30r $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\cancel{\sqrt{1-x^2} = t}$

$x = a\sin\theta \qquad a=1$

$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

$dx = a\cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{1}{a^2\sin^2\theta\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}\, a\cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{1}{a\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{1}{\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}}\cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{1}{\sin^2\theta}\, d\theta$

$\cancel{= \int \left(\frac{2}{1-\cos 2\theta}\right) d\theta}$

$\cancel{= 2\int \frac{1}{1-\cos 2\theta}\, d\theta}$

$= \int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$

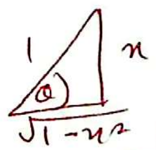
$= -\cot\theta$

$= -\cot(\sin^{-1}(x)) + c$

ans

$= -\cot\theta$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$



$\cot\theta = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

2.30r $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

$x = 2\sin\theta \mid dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$= \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\; 2\cos\theta\, d\theta$

$= \int \sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\; 2\cos\theta\, d\theta$

$= \int 2\cos\theta\; 2\cos\theta\, d\theta$

$= \int 4\cos^2\theta\, d\theta$

$= 4\int \cos^2\theta\, d\theta$

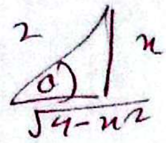
$= 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= 2\left[\int 1\, d\theta + \int \cos 2\theta\, d\theta\right]$

$= 2\theta + \frac{\cancel{2}\sin 2\theta}{2}$

$= 2\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin\left[2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

ans



$= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$+ \sin 2\theta$

$= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\,\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$

2.30r $\int \sqrt{x^2+9}\, dx$

$x = 3\tan\theta \mid dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \sqrt{9\tan^2\theta + 9}\, dx$

$= \int 3\sqrt{\tan^2\theta + 1}\, dx$

$= \int 3\sqrt{\sec^2\theta}\, dx$

$= \int 3\sec\theta\, dx$

$= \int 3\sec\theta \cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$

$= 9\int \sec^3\theta\, d\theta$

[illegible]

2.30r $\int \sqrt{x^2-5}\, dx$

$= \int \sqrt{x^2-(\sqrt{5})^2}\, dx$

$x = \sqrt{5}\sec\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta$

$dx = \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$= \int \sqrt{5\sec^2\theta - 5}\cdot\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$= \int 5\tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$= \int 5\tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$

$= \int 5\sec\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$

$= \underbrace{\int 5\sec^3\theta\, d\theta}_{\text{[illegible]}} + \int 5\sec\theta\, d\theta$

$+ 5\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$

ආදේශක යොදාගැනීම ආකාර

[4.1]

(1) ගණිතයේදී භාග ආකාරයේ ඇති [illegible] ආදේශය එම කොටස් ඉවත්කිරීම ආදේශනයෙනි [illegible] කොටස් [illegible] ආදේශනයෙනි.

2. සො/ $\int \frac{1}{x^{1/3}-x^{1/6}}\,dx$

$x^{1/6}=t$ ලෙස ගනිමු

$x=t^6 \qquad dx=6t^5\,dt$

$x^{1/3}=t^2$

$=\int \frac{1}{t^2-t}\,dx$

$=\int \frac{1}{t^2-t}\cdot 6t^5\,dt$

$=\int \frac{6t^4}{t-1}\,dt$

2.3 සො/ $\int \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx$

$x^{1/6}=t$

$x=t^6$

$x^{1/2}=t^3 \qquad x^{1/3}=t^2$

$dx=6t^5\,dt$

$=\int \frac{1}{t^3+t^2}\,6t^5\,dt$

$=\int \frac{6t^3}{t+1}\,dt$

$$\begin{array}{r|l} & 6t^2-6t+6 \\ t+1 & 6t^3 \\ & 6t^3+6t^2 \\ & -6t^2 \\ & -6t^2-6t \\ & 6t \\ & 6t+6 \\ & -6 \end{array}$$

$=\int 6t^2-6t+6-\frac{6}{t+1}\,dt$

1. සො/ $\int \frac{1}{x^{2/3}+x^{4/3}}\,dx$

$x^{1/3}=t$

$x=t^3 \qquad dx=3t^2\,dt$

$x^{2/3}=t^2$

$x^{4/3}=t^4$

$=\int \frac{3t^2}{t^2+t^4}\,dt$

$=3\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$=3\tan^{-1}(x^{1/3})+c$

[4.2]

ත්‍රිකෝණමිතික ආදේශනය. [illegible]

7. සො/ $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$\sqrt{4-x^2} \qquad x=2\sin\theta$

$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$x=0$: $0=\sin\theta$, $\theta=0$

$x=2$: $2=2\sin\theta$, $\sin\theta=1$, $\theta=\pi/2$

$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,dx$

$=\int_0^{\pi/2}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,dt$

$=\int_0^{\pi/2}4\cos^2\theta\,dt$

$=4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$

$=2\int_0^{\pi/2}1.\,d\theta+2\int_0^{\pi/2}\cos2\theta\,d\theta$

$=2[\theta]_0^{\pi/2}+2\left[\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}+c$

$=2[\pi/2-0]+2\left[\frac{\sin(\frac{2\pi}{2})}{2}-\sin0\right]$

$=2\,\pi/2+0$

$=\pi$

(මේ) ආදේශ ක්‍රම මගින් අනුකලනය

part 2

විශේෂ අනුකල

43 $\int \tan^n x$ අනුකලනය

ආදේශය $\tan x = t$

44 $\int \cot^n x$ අනුකලනය

ආදේශය $\cot x = t$

Note: $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\sin x = \dfrac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$

$\cos x = \dfrac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$

45 අනුකල

$\int \dfrac{p}{a+b\cos x}$, $\int \dfrac{p}{a+b\sin x}$

$\int \dfrac{p\cos x}{a+b\cos x}$, $\int \dfrac{p\sin x}{a+b\cos x}$

$\int \dfrac{p\cos x}{a+b\sin x}$, $\int \dfrac{p\sin x}{a+b\sin x}$

$\int \dfrac{p}{a\cos x + b\sin x + c}$

ආදේශය

$\tan \frac{x}{2} = t$

* හරයේ ඇති පද $\sin x, \cos x$ වල එකක් හෝ දෙකම් යොදා ගැනේ

* ඉහත අනුකල වල $\cos 2x, \sin 2x$ ඇත්නම්,
ආදේශය $\tan x = t$

46 අනුකල

$\int \dfrac{1}{1+\sin x}$, $\int \dfrac{1}{1-\sin x}$

$\int \dfrac{1}{1+\cos x}$, $\int \dfrac{1}{1-\cos x}$

ක්‍රමය

හරයේ ප්‍රකාශනයේ ද්විපදයෙන් ගුණ කර ලැබෙන ප්‍රකාශනය සුළු කිරීමෙන් විසඳීම

47 අනුකල

$\int \dfrac{p\sin x}{a+b\cos x}$, $\int \dfrac{p\cos x}{a+b\sin x}$

ක්‍රමය

$\ln|\text{හරය}|$ ස්වරූපයෙන් පැවතිය හැක

උදා: $\int \tan^4 x \, dx$ ($\tan x = t$)

$\tan x = t$ ආදේශයෙන්.

$x = \tan^{-1} t$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$

$dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$= \int t^4 \, dx$

$= \int t^4 \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}$

$= \int \dfrac{t^4}{1+t^2} \, dt$

$$\begin{array}{r|l} & t^2 - 1 \\ \hline 1+t^2 & t^4 \\ & t^2 + t^4 \\ & -t^2 \\ & -t^2 - 1 \\ \hline & +1 \end{array}$$

$= \int (t^2-1)\,dt + \int \dfrac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \dfrac{t^3}{3} - t + \tan^{-1}\left(\dfrac{t}{1}\right)$

$= \dfrac{t^3}{3} - t + \tan^{-1}(t)$

$= \dfrac{(\tan x)^3}{3} - \tan x + \tan^{-1}(\tan x)$

$= \dfrac{(\tan x)^3}{3} - \tan x + x + C$ //

ප්‍ර ⓐ $\int \cot^3 x \, dx$

$\cot x = t$

$x = \cot^{-1}(t)$

$dx = \dfrac{-1}{t^2+1} dt$

$= \int t^3 \cdot \dfrac{-1}{t^2+1} dt$

$= \int \dfrac{-t^3}{t^2+1} dt$

$t^2+1 \overline{) t^3}$, quotient t; $\; t^3 + t$; remainder $-t$

$= -1 \left[\int \cancel{t^2} \, dt + \int \dfrac{-t}{t^2+1} dt \right]$

$= -1 \left[\cancel{\dfrac{t^3}{3}} \; \dfrac{t^2}{2} \; \dfrac{-1}{2}\left[\ln|t^2+1| \right] \right]$

$= \dfrac{-\cot^2 x}{2} \; \cancel{- \cot x} + \dfrac{1}{2} \ln|\cot^2 x + 1| + c$

$= -\dfrac{\cot^2 x}{2} + \dfrac{1}{2} \ln|\cot^2 x + 1| + c$ //

ප්‍ර ⓒ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{4\cos x + 3\sin x + 5} dx$

$\tan\frac{x}{2} = t$

$x = 2\tan^{-1}(t)$

$dx = \dfrac{2}{t^2+1} dt$

$dx = \dfrac{2}{t^2+1} dt$

$x = 0$ විට, $t = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ විට, $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{4\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right] + 3\left[\frac{2t}{1+t^2}\right] + 5} \cdot \dfrac{2}{(t^2+1)} dt$

$\cancel{\displaystyle\int_0^1 2 \left[\dfrac{1+t^2}{4-4t^2 + 6t + 5(t^2+1)t} \right] dt}$

$\cancel{\displaystyle\int_0^1 2 \left[\dfrac{1+t^2}{5t^4 + 6t^2 + 6t + 9} \right] dt}$

$= \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\cancel{(1+t^2)}}{4(1-t^2) + 6t + 5(1+t^2)} \dfrac{2}{\cancel{(1+t^2)}} dt$

$= \displaystyle\int_0^1 2\left[\dfrac{1}{t^2+6t+9} \right] dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \left[\dfrac{2}{(t+3)^2} \right] dt$

$= 2\left[\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{(t+3)^2} dt \right]$

$= 2\left[\displaystyle\int_0^1 (t+3)^{-2} dt \right]$

$= 2\left[\left[\dfrac{(t+3)^{-1}}{-1} \cdot \dfrac{1}{1} \right]_0^1 \right]$

$= -2\left[\left[\dfrac{1}{t+3} \right]_0^1 \right]$

$= -2\left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} \right]$

$= \dfrac{+1}{6}$ //

ප්‍ර ⓓ $\int \dfrac{1}{1-\sin x} dx$

සංයුජයක් ගුණ කර ගෙන වැඩ කරමු

$= \int \dfrac{1}{1-\sin x} \times \dfrac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)} dx$

$= \int \dfrac{(1+\sin x)}{(1 - \sin^2 x)} dx$

$= \int \dfrac{(1+\sin x)}{(1-\sin^2 x)} dx$

$= \int \dfrac{(1+\sin x)}{\cos^2 x} dx$

$= \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx + \int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \sec^2 x \, dx + \int \tan x \cdot \sec x \, dx$

$= \tan x + \sec x + c$ //

2.3Q ⑤ $\int \frac{7\sin x}{5+4\cos x}\,dx$

$= \int \frac{-\frac{7}{4}(-4\sin x)}{4\cos x+5}$

$= -\frac{7}{4}\ln|4\cos x+5| + C$

2.3Q ⑥ $\int \frac{1}{3-\cos 2x}\,dx$

$\tan x = t$

$x = \tan^{-1}(t)$

$dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \int \frac{1}{3-\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}} \cdot \frac{1}{(t^2+1)}\,dt$

$= \int \frac{1}{3+3t^2-1+t^2} \cdot 1\,dt$

$= \int \frac{1}{4t^2+2}\,dt$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2t^2+1}\,dt$

$= \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{1}\tan}$ $= \frac{1}{2}$

(VII) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය

- 01 ශ්‍රිතයන් ගුණිතයක් ලෙස (වර්ග දෙකක ශ්‍රිත)
- 02 ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත අනුකලනය කිරීමේදී
- 03 ලඝුගණක ශ්‍රිත අනුකලනය කිරීමේදී
- 04 $\int \sec^3 x$, $\int \csc^3 x$ අනුකලනය
- 05 2 වතාව අනු අනුකලනය

Note: + සාමාන්‍යයෙන් $\frac{dv}{dx}$ දුන්නොත් v සෙවීම

e.g. $\frac{dv}{dx} = x^5$, V ?

$v = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6}$

e.g. $\frac{dv}{dx} = e^{4x}$, v ?

$v = \int e^{4x} = \frac{e^{4x}}{4}$

ලඝු ගණක වලදී දැනගත යුතු දේ (log / ln)

* $\ln c(1+\tan\theta)$
  මෙහි c නියතයකි
  (ශූන්‍ය වීම නොහැක)

* $\ln c(1+\tan\theta)$
  $= \ln c + \ln(1+\tan\theta)$
  $\times \longrightarrow (+)$

* $\ln\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)$
  $= \ln 2 - \ln(1+\tan\theta)$
  $\div \longrightarrow (-)$

* $2\ln c = \ln(c)^2$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතා අවස්ථා

01 ශ්‍රිතයන් ගුණිතයක් ලෙස

48

$$\int u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = uv - \int v \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

* u හා $\frac{dv}{dx}$ තෝරා ගැනීම.

$u \longleftrightarrow \frac{dv}{dx}$

I L A T E

- I — ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත $\tan^{-1}(x)$
- L — ලඝු
- A — වීජීය ශ්‍රිත x^2
- T — ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත
- E — ඝාතීය ශ්‍රිත e^x, e^θ

* විශේෂ කරුණු

① u හා $\frac{dv}{dx}$ ලෙස අනුකලනය කළ නොහැකිනම්, දෙකම මාරු කරන්න

② තනි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක් පමණක් අනුකලනයේදී x1 ලෙස
$1 = \frac{dv}{dx}$ හා ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත $= u$
ලෙස ගෙන අනුකලනය කිරීම

ඕනෑම තනි ශ්‍රිතයක් අනුකලනයේදී
x1 ලෙස, 1 වීජීය ශ්‍රිතයක් (A)
ලෙස ගෙන u, $\frac{dv}{dx}$ ලෙස
අනුකලනය කිරීම.

③ කොටස් වශයෙන් අනුකලනය අතරතුරේ කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කළ හැක

④ අනුකලනය කළ විට ප්‍රශ්නය නැවත ලැබුණොත් එය ප්‍රශ්නයට ගෙනවිත් පසුව අනුකලනය කරන්න

2.3or $\boxed{01}$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{=\frac{dv}{dx}} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$x \quad \cos x$

$= uv - \int v \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$

$\frac{dv}{dx} = \cos x$

$v = \int \cos x \, dx$

$v = +\sin x$

$= x(+\sin x) - \int +\sin x \cdot 1$

$= +x\sin x + \cos x + c$

2.3or $\boxed{01}$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{=\frac{dv}{dx}} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$x \quad ex$

$= uv - \int v \frac{du}{dx} dx$

$\frac{dv}{dx} = e^x$

$v = \int e^x dx$

$v = e^x$

$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1$

$= e^x x - e^x + c$

2.3or $\boxed{01}$ 2

$$\int \sin^{-1} x \, dx$$

$$\int \underbrace{1}_{\frac{dv}{dx}} \cdot \underbrace{\sin^{-1} x}_{u} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$\sin^{-1} x \quad 1$

$= uv - \int v \frac{du}{dx} dx$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$v = \int 1 \cdot dx$

$v = x$

$= \sin^{-1} x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{1-x^2}$

$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$

2.3or $\boxed{01}$ 2

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int \underbrace{1}_{\frac{dv}{dx}} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$\ln x \quad 1$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$v = x$

$= \ln x \, x - \int x \frac{1}{x} dx$

$= \ln x \cdot x - x + c$

2.3or $\boxed{01}$ 3

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{=\frac{dv}{dx}} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$x^2 \quad \cos x$

$= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x \, dx$

$\frac{dv}{dx} = \cos x$

$v = (\sin x)$

$= x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{\frac{dv}{dx}} dx$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$x \quad \sin x$

$V = -\cos x$

$= x^2 \sin x$
$\quad -2\left[-x\cos x - \int -\cos x \cdot 1 \cdot dx\right]$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x \, \cancel{+2\sin x}$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

2.3or $\boxed{01}$ 4

$$\int \underbrace{e^{4x}}_{\frac{dv}{dx}} \underbrace{\cos 3x}_{u} dx$$

$u \longrightarrow \frac{dv}{dx}$
ZLATE
$\cos 3x \quad e^{4x}$

* ඝාතීය (E) හා ත්‍රිකෝණමිතික (T) ශ්‍රිතවල දී $\frac{dv}{dx}$, u මාරු කර උවද හොඳින් විසඳිය හැක.

$$\int \underbrace{e^{4x}}_{u} \underbrace{\cos 3x}_{=\frac{dv}{dx}} dx$$

$v = \frac{\sin 3x}{3}$

$= e^{4x} \frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3} e^{4x} \cdot 4 \, dx$

$= e^{4x} \frac{\sin 3x}{3} - \frac{4}{3} \int \underbrace{e^{4x}}_{u} \underbrace{\sin 3x}_{\frac{dv}{dx}} dx$

$= e^{4x} \frac{\sin 3x}{3} - \frac{4}{3}\left[-e^{4x} \frac{\cos 3x}{3} - \int -\frac{\cos 3x}{3} e^{4x} 4 \, dx\right]$

$= e^{4x} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{4}{3} e^{4x} \frac{\cos 3x}{3} - \frac{16}{9} \int e^{4x} \cos 3x$

$\frac{25}{9} \int e^{4x} \cos 3x \, dx = e^{4x} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{4}{3} e^{4x} \frac{\cos 3x}{3}$

$\int e^{4x} \cos 3x \, dx = \frac{9}{25}\left[\frac{e^{4x} \sin 3x}{3} + \frac{4}{9} e^{4x} \cos 3x\right] + c$

2. ප්‍රශ් $\boxed{01}$ (4)

$$\int \underbrace{e^x}_{\frac{dv}{dx}} \underbrace{\cos x}_{u}\, dx \qquad u \xrightarrow[\text{ILATE}]{} \frac{dv}{dx}$$

$\int e^x$

$$= \cos x\, e^x - \int e^x(\sin x)\,dx \qquad v = e^x$$

$$= e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{\frac{dv}{dx}} \underbrace{\sin x}_{u}\, dx$$

$$= e^x \cos x + \left[\sin x\, e^x - \int e^x \cos x\, dx\right]$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \cos x}{2} + \frac{e^x \sin x}{2} + c$$

2. ප්‍රශ් $\boxed{01}$

ආදේශක ක්‍රමයේ මගින්
කොටස් ගෙන ද කළ හැකිය.

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\, dx$$

$\sqrt{x+1} = t$ ලෙස ගනිමු

$$x = t^2 - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$dx = 2t\,dt$$

$$= \int e^t . 2t\, dt \qquad u \xrightarrow[\text{ILATE}]{} \frac{dv}{dx}$$

e^t

$$= 2\int \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{t}_{\frac{dv}{dt}}\, dt \qquad \frac{dv}{dt} = 1, \quad v = 1$$

$$= 2\left[te^t - \int e^t . 1\, dt\right]$$

$$= 2te^t - 2e^t$$

$$= 2\sqrt{x+1}\, e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} + c$$

2. ප්‍රශ් $\int_2^4 x \ln x\, dx = a\ln b + c$

සමාන කිරීම a, b, c සොයන්න

$$= \int_2^4 \underbrace{x}_{\frac{dv}{dx}} \underbrace{\ln x}_{u}\, dx \qquad u \xrightarrow[\text{ILATE}]{} \frac{dv}{dx}$$

$\ln x$

$$= \left[\ln x \frac{x^2}{2}\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \left[\ln x \frac{x^2}{2}\right]_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 x\, dx$$

$$= \left[\ln x \frac{x^2}{2}\right]_2^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$

$$= \left[\ln 4 . \frac{16}{2} - \ln 2 . \frac{4}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right]$$

$$= \left[8\ln 2^2 - 2\ln 2\right] - \frac{12}{4}$$

$$= \left[\ln 2^{16} - \ln 2^2\right] - 3$$

$$= \ln \frac{2^{16}}{2^2} - 3$$

$$= \ln 2^{14} - 3$$

$$= 7\ln 4 - 3$$

$$= a\ln b + c$$

$$a = 7, \; b = 4, \; c = (-3)$$

2. ප්‍රශ් $\int_1^{e^\pi} 1 . \cos(\ln x)\, dx$

මෙම ශ්‍රිතය ප්‍රකාශ කොට
අනුකලනය කළ නොහැක
$\therefore \frac{dv}{dx}$, u ලෙස ගෙන අනුකලනය
කරමු

$$\int_1^{e^\pi} \underbrace{1}_{\frac{dv}{dx}} \underbrace{\cos(\ln x)}_{u}\, dx \qquad v = x$$

$$= \left[\cos(\ln x) x\right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\left[-\sin(\ln x) . \frac{1}{x}\right] dx$$

$$= \left[\cos(\pi \ln e) e^\pi - \cos 0\right] + \left[\left[\sin(\ln x) x\right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\, dx\right]$$

$$= \left[-e^\pi - 1\right] + \left[\sin(\ln e^\pi)e^\pi - \sin(\ln 1)\right] - \int_1^{e} \cos(\ln x)\, dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} \ln 1 = 0 \\ \ln e = 1 \end{matrix}}$$

$$= [-e^{\pi} - 1]$$

$$+ [\sin(\ln e^{\pi}) e^{\pi} - \sin(\ln 1) 1]$$

$$- \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$$

$$2 \int_1^{e^{\pi}} 1 \cdot \cos(\ln x) dx = -(e^{\pi} + 1) + 0$$

$$\int_1^{e^{\pi}} 1 \cdot \cos(\ln x) dx = \frac{-(e^{\pi} + 1)}{2} //$$

ආදේශය හා වෙනත් ක්‍රමයන්
→ Part 3

49

$$\int \frac{p}{(ax+b)\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \text{ ආකාරය}$$

$$\int \frac{p}{ax\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \text{ ආකාරය}$$

ආදේශය

$$(ax+b) = \frac{1}{t}$$

50

$$\int \frac{p}{(ax+b)\sqrt{Ax+B}} \text{ ආකාරය}$$

ආදේශය

$$\sqrt{Ax+B} = t$$

උදා: $\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+4x+1}} dx$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$dx = \frac{-1}{t^2} dt$$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{2 \cdot \frac{1}{t^2} + 4\frac{1}{t} + 1}} \cdot \frac{-1}{t^2} dt$$

$$\int \frac{-1/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2+4t+t^2}{t^2}}} dt$$

$$\int \frac{-1}{1\sqrt{t^2+4t+2}}$$

$$-\int \frac{1}{\sqrt{(t+2)^2 - (\sqrt{2})^2}}$$

$$\cancel{-\sin^{-1}\left(\frac{t+2}{\sqrt{2}}\right)} \quad \boxed{-\ln|(t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 2}}$$

$$= -\ln\left|(\tfrac{1}{x}+2) + \sqrt{(\tfrac{1}{x}+2)^2 - 2}\right| + c //$$

උදා: $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+1}} dx$

$$(x+2) = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow dx = \frac{-1}{t^2} dt$$

$$x = \left(\frac{1}{t} - 2\right) = \frac{(1-2t)}{t}$$

$$\cancel{\int \frac{-1/t^2}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}} dt}$$

$$\cancel{\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt}$$

$$\cancel{-\ln|t + \sqrt{t^2+1}}$$

$$\int \frac{-1/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-2)^2+1}} dt$$

$$\int \frac{-1/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} + 4 + 1}} dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}} dt$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{(t-\frac{2}{5})^2 - \frac{1}{25}}} dt$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \ln|(t-\tfrac{2}{5}) + \sqrt{(t-\tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{1}{5}}| + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \ln\left|\left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{2}{5}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}\right| + c //$$

උදා: $\int \frac{1}{(3x+10)\sqrt{x-1}} dx$

$$\sqrt{x-1} = t$$

$$x = t^2 + 1$$

$$dx = 2t\, dt$$

$$\int \frac{1}{(3t^2+13) \cdot t} \cdot 2t\, dt$$

$$2 \int \frac{1}{(3t^2+13)}$$

$$\boxed{2 \frac{1}{\sqrt{13}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{13}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{39}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{x-1}}{\sqrt{13}}\right) + c$$

ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත අනුකලනය

↳ part 4

51

> පහත දී ඇති ශ්‍රිතයන් සාධනයෙන් හෝ දී ඇති ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයන් අනුකලනය

2. ① පහත ශ්‍රිතයන් අනුකලනය කරන්න.

$$\int e^{\sqrt{x+3}}\,dx$$

$\sqrt{x+3} = t \Rightarrow x = t^2 - 3$

$dx = 2t\,dt$

$$= \int \underbrace{e^t}_{\frac{dv}{dt}} . \underbrace{2t}_{u}\,dt \qquad u\ ZLATE\ \frac{dv}{dx} \to e^t$$

$\frac{dv}{dt} = e^t$

$$= 2\left[t.e^t - \int e^t . 1\,dt \right] \qquad v = \int e^t dt,\quad v = e^t$$

$= 2te^t - 2e^t + c$

$= 2\sqrt{x+3}\, e^{\sqrt{x+3}} - 2e^{\sqrt{x+3}} + c$

2. පහත ශ්‍රිතයන් අනුකලනය කරන්න.

$$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx$$

පූර්ණ වර්ගයක් කරමු

$$\int \sqrt{-\{(x-2)^2 - 2^2\}}\,dx$$

$$\int \sqrt{2^2 - (x-2)^2}\,dx \qquad \text{සාමාන්‍යයෙන් } \sqrt{a^2 - x^2} \text{ විට } x = a\sin\theta \text{ ආදේශය යොදමු}$$

$(x-2) = 2\sin\theta$

$x = 2\sin\theta + 2$

$dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$$\int 2\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$4\int \sqrt{\cos^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$$

$$4\int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$4\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$2\left[\int 1.d\theta + \int \cos 2\theta\,d\theta\right]$$

$$2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right] + \sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) + c$$

2. පහත ශ්‍රිතයන් අනුකලනය

$$\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

$\sqrt{x} = t$ හෝ $x = \sin^2\theta$ ලෙස ගත විට

$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

$dx = 2\sin\theta.\cos\theta\,d\theta$

$$\int \sin^{-1}\sqrt{\sin^2\theta}\,.\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \sin^{-1}(\sin\theta)\,.\,\sin 2\theta\,.\,d\theta$$

$$\int \underbrace{\theta}_{u} . \underbrace{\sin 2\theta}_{\frac{dv}{dx}}\,d\theta \qquad ZLATE\ \frac{dv}{dx} \to \sin 2\theta$$

$$\theta\left(\frac{-\cos 2\theta}{2}\right) - \int \frac{-\cos 2\theta}{2}.1.d\theta \qquad v = \frac{-\cos 2\theta}{2}$$

$$-\frac{\theta\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\theta}{2} + c$$

$$-\frac{\sin^{-1}(\sqrt{x})\cos\left[2\sin^{-1}\sqrt{x}\right]}{2} + \frac{1}{4}\sin\left[2\sin^{-1}(\sqrt{x})\right] + c$$

2. පහත ශ්‍රිතයන් අනුකලනය

$$\int x^7 e^{x^8}\,dx$$

$x^8 = t$, ආදේශයෙන් අනුකලනය

$\frac{dt}{dx} = 8x^7$

$dt = 8x^7 dx$

$x^7 dx = \frac{1}{8}dt$

$$\int \frac{1}{8} e^{t}\,dt \qquad \frac{1}{8}e^{t} + c$$

$$\frac{1}{8}\int e^t dt \qquad \frac{1}{8}e^{x^8} + c$$

2. පහත ශ්‍රිතයන් අනුකලනය

$$\int 5^{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$\sqrt{x+1} = t$

$x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int 5^t . 2t\,dt$$

$$2\int 5^t . t\,dt$$

$5^t = e^y$, ලඝුගණක ගනිමු

$t\ln 5 = y\ln e$

$y = \frac{t\ln 5}{\ln e} = t\ln 5$

$$2\int \underbrace{e^{t\ln 5}}_{\frac{dv}{dx}} . \underbrace{t}_{u}\,dt$$

$2[$

ප්‍රතිලෝමයෙන් t ආදේශය

2 වන $e^x = t$ ආදේශයෙන්

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ අගයන්න

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx$

$e^x = t$

x විෂයෙන් අවකලනය

$\frac{dt}{dx} = e^x$

$dt = e^x \cdot dx$

$e^x dx = dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$\sin^{-1}\left(\frac{t}{1}\right)$

$\sin^{-1}(e^x) + c$

2 වන $\cot\theta = \sin x$ ආදේශයෙන්

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$ අගයන්න

$\cot\theta = \sin x$

θ විෂයෙන් අවකලනය

$\cos x \frac{dx}{d\theta} = -\csc^2\theta$

$\cos\theta dx = -\csc^2\theta\, d\theta$

$\int \frac{-\csc^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

$-\int \frac{\csc^2\theta\, d\theta}{\csc\theta}$

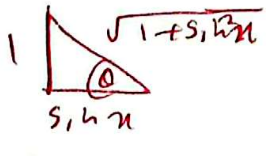
$-\int \csc\theta\, d\theta$

$-\ln|\csc\theta - \cot\theta| + c$

$\cot\theta = \sin x$

$\tan\theta = \frac{1}{\sin x}$

$-\ln\left|\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x\right| + c$



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$\cot\theta = \sin x$

2 වන $x^3 t + 1 = 0$ ආදේශයෙන්

$\int \frac{1}{x(x^3-1)}\,dx$

$\int \frac{x^2}{x^3(x^3-1)}\,dx$

ඉහත ඉහළට පහළට ආදේශය කරන්න

$x^3 t + 1 = 0$

$t = \frac{-1}{x^3}$

$\cancel{\frac{dt}{dx}}$

$x^3 = \frac{-1}{t}$

x විෂයෙන් අවකලනය

$3x^2 = \frac{1}{t^2}\frac{dt}{dx}$

$x^2 dx = \frac{1}{3t^2}dt$

$\int \frac{1}{\frac{-1}{t}\left(\frac{-1}{t}-1\right)} \cdot \frac{1}{3t^2}\,dt$

$\int \frac{1}{\frac{1}{t}\frac{(t+1)}{t}} \cdot \frac{1}{3t^2}\,dt$

$\int \frac{t^2}{(t+1)} \cdot \frac{1}{3t^2}\,dt$

$\frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)}\,dt$

$= \frac{1}{3}\ln|t+1| + c$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{-1}{x^3}+1\right| + c$

2 වන $x = \sin^2\theta$ ආදේශයෙන්

$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ අගයන්න

$x = \sin^2\theta$

θ විෂයෙන් අවකලනය

$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

$dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$dx = \sin 2\theta\, d\theta$

$\int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\,dx$

$\int \tan\theta \cdot \sin 2\theta\, d\theta$

$\int \sin\theta \cdot 2\sin\theta\, d\theta$

$2\int \sin^2\theta\, d\theta$

$\cancel{2}\int \frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}}\,d\theta$

$\int 1\, d\theta - \int \cos 2\theta\, d\theta$

$\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

$\sin^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{\sin(2\sin^{-1}(\sqrt{x}))}{2} + c$

② නිශ්චිත අනුකලනය

පූර්ව දැනුම

$\int f(x)dx = g(x)$ නම්

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)}$$

* සාමාන්‍ය අනුකලනය කර
  දී ඇති සීමාවන් ආදේශ කර
  ඉහළ සීමා පහළ සීමාවන්ගෙන් අඩු කර
  ගන්න

* මෙහිදී c ලෙස නියතයක් නොලැබේ.

උදා: $\int_5^{10} \frac{1}{x+1} dx$

$= [\ln|x+1|]_5^{10}$

$= \ln|11| - \ln|6|$

$= \ln|11/6|$

* ඝාතාංකයෙන් බෙදාව ගන්නවා.

උදා: $\int_1^5 e^{2x} dx$

$= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^5$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{1}\right]_1^5$

$= \frac{1}{2}\left[e^{10} - e^2\right]$

$= \frac{1}{2}(e^{10} - e^2)$

හෝ

$= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^5$

$= \left(\frac{e^{10}}{2} - \frac{e^2}{2}\right)$

$= \left(\frac{e^{10} - e^2}{2}\right)$

උදා: $\int_5^8 \frac{1}{x^2-2x} dx$

$\int_5^8 \frac{1}{x(x-2)} dx$

$= \int_5^8 \frac{-1/2}{x} + \int_5^8 \frac{1/2}{(x-2)}$

$= -\frac{1}{2}\int_5^8 \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{1}{(x-2)}$

$= -\frac{1}{2}[\ln|x|]_5^8 + \frac{1}{2}(\ln|x-2|]_5^8$

$= -\frac{1}{2}[\ln|8| - \ln|5|) + \frac{1}{2}(\ln|6| - \ln|3|]$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{8}{5}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{6}{3}\right|$

$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{1}{2}\ln 2$

$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\frac{8}{5}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{8/5}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

උදා: $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \pi/2}{2} - 0\right]$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

Notes

අනිශ්චිත අනුකලනයේදී c වශයෙන් නියතය
අනිවාර්යයෙන් දැමිය යුතු වේ

නිශ්චිත අනුකලනයේදී c වශයෙන් නියතයක්
නැත

නිශ්චිත අනුකලනයේ ගුණ ලක්ෂණ

2 සීමාවන් මාරු කළ විට පිළිතුර (−) ප්‍රමාණයකින් වෙනස් වේ

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

3

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx}$$

4 $a < c < b$ නම්,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

5 සීමාව හා ශ්‍රිතය වෙනස් නොවන විට විචල්‍ය වෙනස් වුව ද නිශ්චිත අනුකලනය එලෙසම පවතියි

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy}$$

උදා: $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$

6 a නියතයක් නම්; b නියතයකි ද

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

හෝ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

6 සාධනය

ප්‍රමේයය $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

LHS $\int_0^a f(x)\,dx$

$x = a - t$ ලෙස ගනිමු

$\frac{dx}{dt} = -1$

$dx = -dt$

$x = 0$	$x = a$
$a = t$	$t = 0$

$\int_a^0 f(a-t)\cdot -dt$

$-\int_a^0 f(a-t)\cdot dt$

$\int_0^a f(a-t)\cdot dt$

$\int_0^a f(a-x)\cdot dx$

උදා: (2) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව භාවිතයෙන්

$I = \int_0^{2024} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2024-x}}\,dx$ අගය සොයන්න

$$\underbrace{\int_0^{2024} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2024-x}}\,dx}_{=I} = \underbrace{\int_0^{2024} \frac{\sqrt{2024-x}}{\sqrt{2024-x}+\sqrt{x}}\,dx}_{=I}$$

$$I + I = \int_0^{2024} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2024-x}} + \frac{\sqrt{2024-x}}{\sqrt{2024-x}+\sqrt{x}}\right)dx$$

$$2I = \int_0^{2024} \frac{\cancel{(\sqrt{x}+\sqrt{2024-x})}}{\cancel{(\sqrt{x}+\sqrt{2024-x})}}\,dx$$

$$2I = \int_0^{2024} 1\,dx$$

$$2I = [x]_0^{2024}$$

$$2I = [2024 - 0]$$

$$I = \frac{2024}{2}$$

$$I = 1012$$

2.(ii) $\int_0^1 x(1-x)^{2005}dx$ ඇගයන්න

$$\int_0^1 x(1-x)^{2005}dx$$

$$=\int_0^1 (1-x)(x)^{2005}dx$$

$$=\int_0^1 \left(x^{2005}-x^{2006}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^{2005}dx-\int_0^1 x^{2006}dx$$

$$=\left[\frac{x^{2006}}{2006}\right]_0^1-\left[\frac{x^{2007}}{2007}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}$$

2.(i) I) a, b නියත විට

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

බව පෙන්වන්න

(II) එනයින් $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ඇගයන්න

(I) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

LHS
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$x=a+b-t$ ගනිමු

$dx=-dt$

$x=a$	$x=b$
$t=b$	$t=a$

$$\int_b^a f(a+b-t)\cdot(-dt)$$

$$\int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

(II) $$\underbrace{\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx}_{=I}=\underbrace{\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx}_{=I}$$

$$2I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}1\cdot dx$$

$$2I=\left[x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$2I=\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]$$

$$I=\frac{\pi}{12}$$

මාපාංක අනුකලනය

පියවර

① මාපාංකය = 0 වන විට x අගය සොයා සංඛ්‍යා රේඛාව මත ලකුණු කර (+), (−) වන ප්‍රදේශ ලකුණු කිරීම

② දී ඇති සාමාන්‍ය අනුකලනය ලියා, එම අගයන් යොදා සාමාන්‍ය අනුකලන වල අගයන් ලෙස ලිවීම

① $\int_0^5 |x-2|\,dx$

$0 \qquad x=2 \qquad 5$

$-(x-2) \qquad +(x-2)$

$= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^5 |x-2|\,dx$

$= \int_0^2 -(x-2)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx$

$= \int_2^5 (x-2)\,dx - \int_0^2 (x-2)\,dx$

$= \left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^5 - \left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_0^2$

$= \frac{9}{4} - 0 - 0 - \frac{4}{2}$

$= \frac{13}{2}$

② $\int_{-2}^5 |x^2-1|\,dx$

$(x-1)(x+1)=0$

$-2 \qquad x=-1 \qquad x=1 \qquad 5$

$(+) \qquad (-) \qquad (+)$

$(x^2-1) \qquad -(x^2-1) \qquad (x^2+1)$

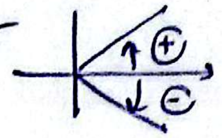
$= \int_{-2}^{-1} (x^2-1) + \int_{-1}^{1} -(x^2-1) + \int_{+1}^{5} (x^2+1)$

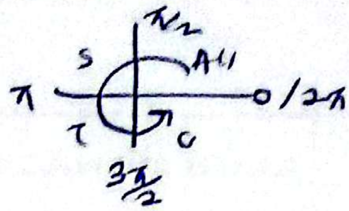
$= \int_{-2}^{-1} (x^2-1) - \int_{-1}^{1} (x^2-1) + \int_{1}^{5} (x^2+1)$

! සාමාන්‍ය ආකාරයෙන් අනුකලනය

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල මාපාංක අනුකලනය

Note





පියවර

① දී ඇති ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයේ හා දී ඇති අගය පරාසය සංඛ්‍යා රේඛාවේ ලකුණු කිරීම

② ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයේ අගය පරාසයේ (−), (+) වන පරාස ලකුණු කිරීම

③ සාමාන්‍ය අනුකලන වල අගයන් ලෙස අනුකලනය කිරීම

① $\int_0^{3\pi/2} |\sin x|\,dx$

$0 \qquad \pi \qquad 3\pi/2$

$+\sin x \qquad -\sin x$

$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} -\sin x\,dx$

$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x\,dx$

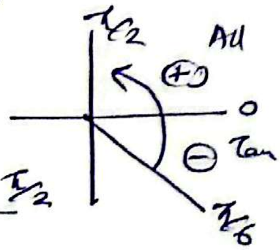
$= [\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{3\pi/2}$

$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi$

$= -(-1) + 1 + 0 - (-1)$

$= 1 + 1 + 1 = 3$

② $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} |\sin 3x|\,dx$



$-\pi/6 \qquad 0 \qquad \pi/2$

$-\sin 3x \qquad \sin 3x$

$= \int_{-\pi/6}^{0} -\sin 3x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx$

$= -\int_{-\pi/6}^{0} \sin 3x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx$

{ සාමාන්‍ය ආකාරයෙන් අනුකලනය

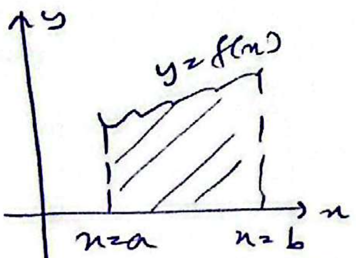
② අනුකලනයේ භාවිත

① වර්ගඵලය

② පරිමාව

01 වර්ගඵලය සෙවීම

01 වක්‍රයක්, x අක්ෂය සමඟ සාදන වර්ගඵලය

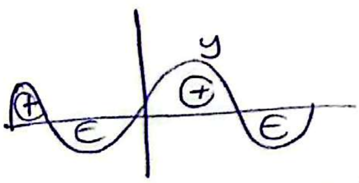


1. $$\boxed{A = \int_a^b y \cdot dx}$$

Note

① අනුකලිත වර්ගඵලය (−) නම්, එය (+) ලෙසට සැලකිය යුතුයි.

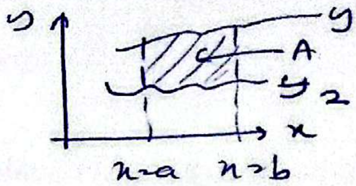
②



y (+) වන කොටස්වලින් (+) වර්ගඵලයක් ලැබේ
y (−) වන කොටස්වලින් (−) වර්ගඵලයක් ලැබේ

③ මෙලෙස x අක්ෂයේ දෙපස වර්ගඵල ඇතිවිට එක දිගට සෙවිය නොහැක. (+) වෙනම (−) වෙනම සොයා (−) වූ ~~අගය~~ (+) කර එකතු කළ යුතුයි

02 වක්‍ර 2ක් අතර වර්ගඵලය



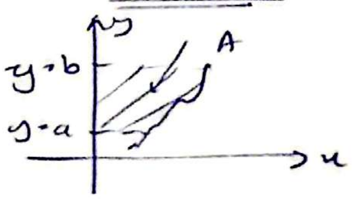
[වක්‍ර 2 අතර වර්ගඵලය] = [y_1 සාදන වර්ගඵලය] − [y_2 සාදන වර්ගඵලය]

$$\text{වක්‍ර අතර වර්ගඵලය} = \int_a^b y_1\, dx - \int_a^b y_2\, dx$$

2. $$\boxed{A = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx}$$

පියවර ① වක්‍ර දෙකම එකම තලයක ඇඳගන්න
② ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල x ඛණ්ඩාංක සොයන්න
③ ඉහත සූත්‍රයට ආදේශ කරන්න

03 වක්‍රයක් y අක්ෂය සමඟ සාදන වර්ගඵලය



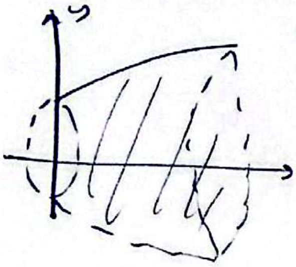
3. $$\boxed{A = \int_a^b x \cdot dy}$$

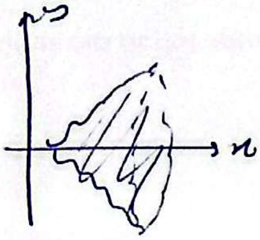
[01] හි Note; පරිදි.

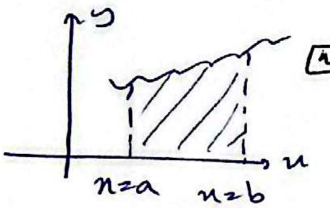
සමීකරණයේ y වෙනුවට x වලින් ලියා ගත යුතුයි

02 පරිමා සෙවීම

01 වක්‍රයක් , x අක්ෂය වටා 360° (2π) භ්‍රමණය කිරීම සෑදෙන වස්තුවේ පරිමාව



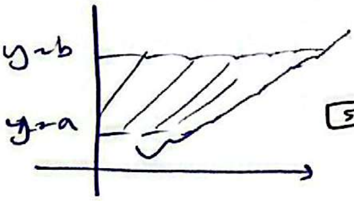




4

$$\boxed{V = \int_a^b \pi y^2 \, dx}$$

02 වක්‍රයක්, y අක්ෂය වටා 360° (2π) භ්‍රමණය කිරීම සෑදෙන වස්තුවේ පරිමාව

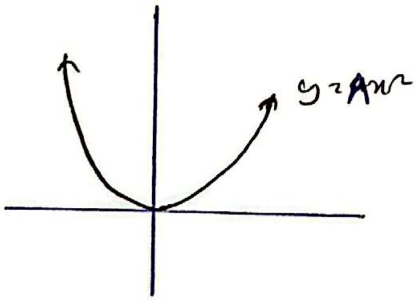


5

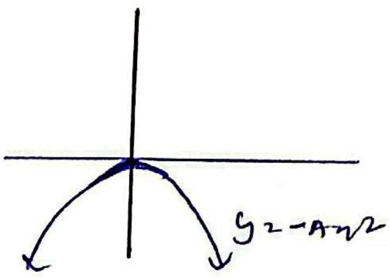
$$\boxed{V = \int_a^b \pi x^2 \, dy}$$

Notes: ප්‍රධාන වක්‍ර (පරාවලයන්)

① $y = Ax^2$

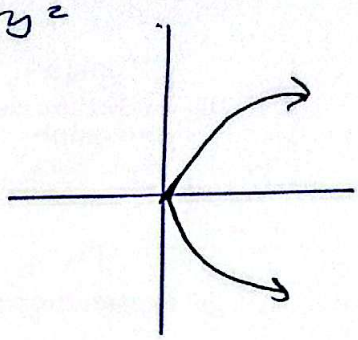


② $y = -Ax^2$

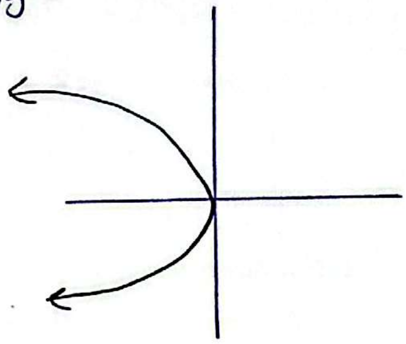


③ $y^2 = Ax$

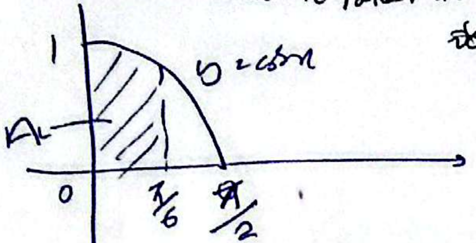
or $x = Ay^2$



④ $x = -Ay^2$



① $y = \cos x$ වක්‍රය හා x අක්ෂය අතර (x = 0 සිට $x = \pi/6$ දක්වා) ඇති x අක්ෂයෙන් සීමා වූ වර්ගඵලය සොයන්න.

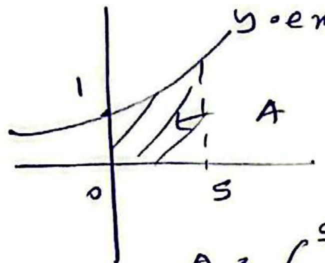


$$A = \int_0^{\pi/6} \cos x \, dx$$

$$A = \int_0^{\pi/6} \cos x \, dx$$

$$A = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/6} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \text{ වර්ග ඒකක}$$

② $y = e^x$ හා x අක්ෂය අතර වර්ගඵලය ($x = 0$ සිට $x = 5$ දක්වා)



$y = e^x$
$x = 0$
$y = 1$

$$A = \int_0^5 e^x \, dx$$

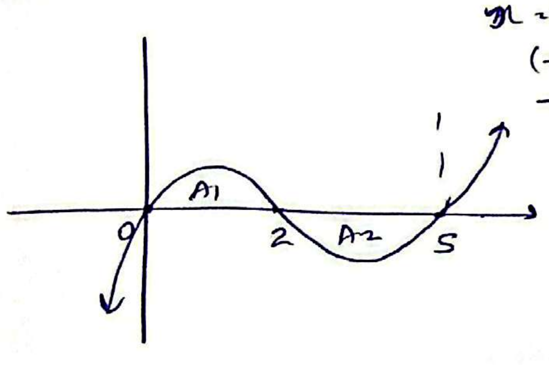
$$A = e^5 - e^0 = (e^5 - 1) \text{ වර්ග ඒකක}$$

③ $y = x^3 - 7x^2 + 10x$ හා x අක්ෂය අතර සීමා වූ වර්ගඵලය සොයන්න

$$y = x(x^2 - 7x + 10)$$

$$y = x(x-5)(x-2)$$

$x \to -\infty$
$(-\infty)^3$
$-\infty$



$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)\, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$A_1 = \left[\frac{2^4}{4} - 7\cdot\frac{8}{3} + 10\cdot\frac{2^2}{2}\right] - 0$$

$$A_1 = \left[24 - \frac{7}{3}\cdot 8\right]$$

$$A_1 = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \int_2^5 (x^3 - 7x^2 + 10x)\, dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2}\right]_2^5$$

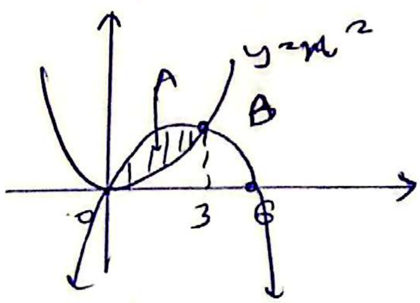
$$A_2 = \left[-\frac{189}{12}\right]$$

$$A_2 = \left|-\frac{189}{12}\right|$$

$$A_2 = +\frac{189}{12}$$

$$A = A_1 + A_2 = \left(\frac{16}{3} + \frac{189}{12}\right) \text{ වර්ග ඒකක}$$

④ $y = 6x - x^2$ හා $y = x^2$ වක්‍ර දෙක අතර සීමා වූ වර්ගඵලය.



$y = x(6 - x)$
$x \to +\infty$
$-x^2$
$-\infty$
$x \to -\infty$
$-(-\infty)^2$
$-\infty$

B/ $x^2 = 6x - x^2$
$2x = 6$
$x = 3$

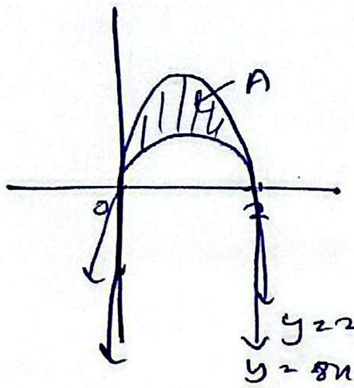
$$A = \int_0^3 \left[(6x - x^2) - x^2\right] dx$$

$$A = \left[6\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$A = \left[3\cdot 9 - 2\cdot 9\right]$$

$A = 9$ වර්ග ඒකක

③ $y = 2x - x^2$ හා $y = 8x - 4x^2$ වක්‍රවලින් වට වූ පෙදෙසේ වර්ගඵලය



$y = 2x - x^2$

$y = x(2-x)$

$x \to +\infty$

$-x^2$

$-\infty$

$x \to -\infty$

$-(-\infty)^2$

$-\infty$

$y = 8x - 4x^2$

$y_2 = 4(2x - x^2)$

$y_2 = 4y_1$

$$A = \int_0^2 (8x - 4x^2 - 2x + x^2)\,dx$$

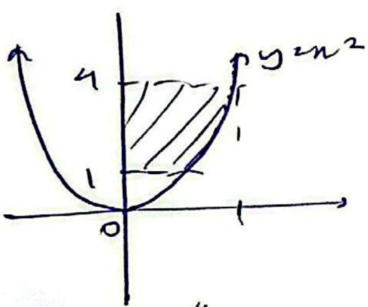
$$A = \int_0^2 (6x - 3x^2)\,dx$$

$$A = \left[\frac{6x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = [3\cdot 4 - 8]$$

$A = 4$ වර්ග ඒකක //

④ $y = x^2$ වක්‍රය හා y අක්ෂය අතර පෙදෙසේ වර්ගඵලය ($y=1$ සහ $y=4$ අතර) [$x \geq 0$ ප්‍රදේශයේ පමණක් සලකන්න



$x \geq 0$

$y = x^2$

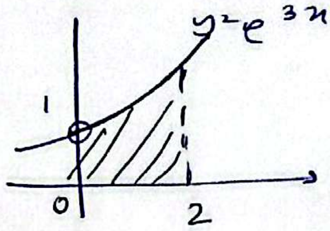
$x = \sqrt{y}$

$$A = \int_1^4 \sqrt{y}\,dy$$

$$A = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$A = \frac{2}{3}[2^3 - 1] = \frac{14}{3}$ වර්ග ඒකක

⑤ $y = e^{3x}$ වක්‍රය හා x අක්ෂය අතර පෙදෙස x අක්ෂය වටා 2π කෝණයකින් භ්‍රමණය කරවීමෙන්



$$V = \int_0^2 \pi(e^{3x})^2\,dx$$

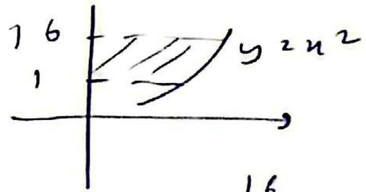
$$V = \pi\int_0^2 e^{6x}\,dx$$

$$V = \pi\left[\frac{e^{6x}}{6}\right]_0^2$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left[e^{12} - e^0\right]$$

$V = \frac{\pi}{6}\left[e^{12} - 1\right]$ ඝන ඒකක //

⑥ $y = x^2$ ($x \geq 0$) වක්‍රයෙන් හා y අක්ෂය අතර පෙදෙස y අක්ෂය වටා 2π කෝණයකින් භ්‍රමණය කළ විට



$x = \sqrt{y}$

$$V = \int_1^{16} \pi x^2\,dy$$

$$V = \pi\int_1^{16} (\sqrt{y})^2\,dy$$

$$V = \pi\int_1^{16} y\,dy$$

$$V = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{16}$$

$V = \frac{\pi}{2}\left[16^2 - 1^2\right]$ // ඝන ඒකක //